

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Λογαριθμική συνάρτηση με βάση a

- Όταν $a > 1$

$$f(x) = \log_a x$$

Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

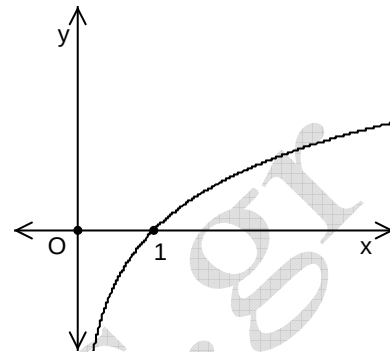
Είναι γνησίως αύξουσα

Τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $(1, 0)$

Είναι $f(x) = \log_a x < 0$ αν $0 < x < 1$

και $f(x) = \log_a x > 0$ αν $x > 1$

Έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των y



- Όταν $0 < a < 1$

$$f(x) = \log_a x$$

Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

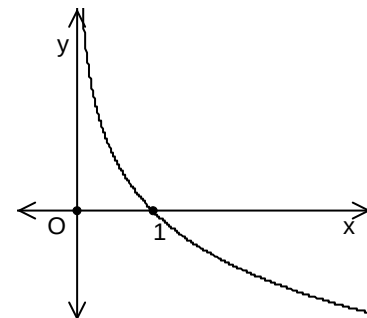
Είναι γνησίως φθίνουσα

Τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $(1, 0)$

Είναι $f(x) = \log_a x > 0$ αν $0 < x < 1$

και $f(x) = \log_a x < 0$ αν $x > 1$

Έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των y



2.

Μια συμμετρία

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = a^x$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης} - 3^{ης}$ γωνίας των αξόνων

3.

Σημαντικές ισοδυναμίες

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Όταν $a > 1$: $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Όταν $a < 1$: $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (αλλάζει η φορά)

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

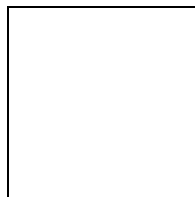
1.

Οι ιδιότητες στη γραφική παράσταση

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_a x$ μπορούμε να συμπεραίνουμε τις ιδιότητές της

2.

Προσοχή στην ιδιότητα



Όταν $a < 1$: $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (αντιστρέφεται η φορά, όταν $a < 1$)

3.

Μέθοδος

Για να λύσουμε λογαριθμική εξίσωση ή ανίσωση ή σύστημα, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε λογαρίθμους που να έχουν ίδιες βάσεις.

4.

Μια συμμετρία

Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = \log_a \frac{1}{x}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$ (αφού $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

i) Να δείξετε ότι $3^{\log x} = x^{\log 3}$ για κάθε $x > 0$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$3^{\log x} = x^{\log 3} \Leftrightarrow \log 3^{\log x} = \log x^{\log 3}$$

$$\log x \cdot \log 3 = \log 3 \cdot \log x \quad \text{που ισχύει}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 3^{\log x} = 54 - x^{\log 3} & \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} 3^{\log x} = 54 - 3^{\log x} \\
 2 \cdot 3^{\log x} &= 54 \\
 3^{\log x} &= 27 \\
 3^{\log x} &= 3^3 \\
 \log x &= 3 \\
 x &= 10^3 \Leftrightarrow x = 1000
 \end{aligned}$$

2.

Να λυθούν οι ανισώσεις

- i) $\log(x+1) > \log x + \log 2$
- ii) $\log_{\frac{1}{4}} x^2 - 1 > 0$
- iii) $1 + \log_2 x > 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned}
 \text{Περιορισμοί : } x+1 > 0 \text{ και } x > 0 & \Leftrightarrow \\
 x > -1 \text{ και } x > 0 & \Leftrightarrow \\
 x > 0 & \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log(x+1) > \log x + \log 2 & \Leftrightarrow \log(x+1) > \log(2x) \\
 x+1 > 2x & \\
 x < 1 &
 \end{aligned}$$

Συναλθεύοντας τις λύσεις αυτές με τους περιορισμούς (1) βρίσκουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $0 < x < 1$

ii)

$$\text{Περιορισμός : } x \neq 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{4}} x^2 > 1 & \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} x^2 > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} \\
 x^2 < 1 &
 \end{aligned}$$

$$x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Συναλθεύοντας τις λύσεις αυτές και τους περιορισμούς (2) βρίσκουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

iii)

$$\text{Περιορισμός : } x > 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \log_2 x > -1 & \Leftrightarrow \log_2 x > -\log_2 2 \\
 \log_2 x > \log_2 2^{-1} &
 \end{aligned}$$

$$x > 2^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Συναληθεύοντας με τους περιορισμούς βρίσκουμε $x > \frac{1}{2}$

3.

Να λυθεί η ανίσωση $\ln^2 x - 5\ln x + 6 < 0$

Λύση

Περιορισμός : $x > 0$

Θέτουμε $\ln x = y$, οπότε η ανίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 6 < 0$

$$2 < y < 3$$

$$2 < \ln x < 3$$

$$\ln e^2 < \ln x < \ln e^3$$

$$e^2 < x < e^3$$

4.

Να λυθεί η ανίσωση $\log(x^2 - 9) < \log(8x)$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμοί : $x^2 - 9 > 0$ και $8x > 0 \Leftrightarrow$
 $(x < -3 \text{ ή } x > 3) \text{ και } x > 0 \Leftrightarrow$
 $x > 3$

$$\begin{aligned} \log(x^2 - 9) < \log(8x) &\Leftrightarrow x^2 - 9 < 8x \\ x^2 - 8x - 9 &< 0 \\ -1 < x &< 9 \end{aligned}$$

Συναληθεύοντας τις λύσεις αυτές με τους περιορισμούς βρίσκουμε ότι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $3 < x < 9$

5.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\log^2 x + \log x}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να ισχύουν $x > 0$ **(1)** και $\log^2 x + \log x \geq 0$ **(2)**

Για τη (2) θέτουμε $\log x = y$

Οπότε $y^2 + y \geq 0 \Leftrightarrow y(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -1 \text{ ή } y \geq 0$

$$\log x \leq -1 \text{ ή } \log x \geq 0$$

$$\log x \leq \log 10^{-1} \text{ ή } \log x \geq \log 1$$

$$x \leq \frac{1}{10} \text{ ή } x \geq 1 \quad \textbf{(3)}$$

Συναλήθευση των (1), (3) δίνει $0 < x \leq \frac{1}{10} \text{ ή } x \geq 1$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 \Leftrightarrow e^{2x}-1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} > 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$

ii)

$$\begin{aligned} f(x) = 2\ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right) = 2\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right) = \ln 2^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = 4 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}-1 = 4e^x+20 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-21 = 0 \quad \text{Θέτουμε } e^x = y \\ &\Leftrightarrow y^2-4y-21 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 7 \quad \text{ή} \quad y = -3 \end{aligned}$$

- Όταν $y = 7 \Leftrightarrow e^x = 7 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 7 \Leftrightarrow x = \ln 7 > \ln 1 > 0$ άρα δεκτή.
- Όταν $y = -3 \Leftrightarrow e^x = -3$ αδύνατη

iii)

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right) > \ln 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}-1 > e^x+5 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-6 > 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $e^x = y$

$$y^2 - y - 6 > 0$$

$$-2 < y < 3$$

$$-2 < e^x < 3$$

Η ανίσωση $-2 < e^x$ αληθεύει για κάθε x .

Η ανίσωση $e^x < 3 \Leftrightarrow \ln e^x < \ln 3 \Leftrightarrow x < \ln 3$

Και επειδή $A = (0, +\infty)$, θα είναι $0 < x < \ln 3$

7.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log(11x^2 - 7x + 10) - \log x^2 - 1$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες, αν βέβαια υπάρχουν.

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $11x^2 - 7x + 10 > 0$ και $x^2 \neq 0$

Η διακρίνουσα του τριώνυμου $11x^2 - 7x + 10$ είναι $\Delta = 49 - 440 = -391 < 0$

Οπότε το τριώνυμο είναι πάντα θετικό.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R}^*$

ii)

Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα των y .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(11x^2 - 7x + 10) - \log x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \log \frac{11x^2 - 7x + 10}{x^2} = 1$$

$$\log \frac{11x^2 - 7x + 10}{x^2} = \log 10$$

$$\frac{11x^2 - 7x + 10}{x^2} = 10$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 5$$

Οπότε τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι τα $(2, 0)$, $(5, 0)$

8.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας των f , g .

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , C_g

Προτεινόμενη λύση

i)

Για να ορίζεται η f , πρέπει $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$

$$\begin{aligned} \text{Θέτουμε } e^x = y \quad y^2 - 4y + 3 > 0 &\Leftrightarrow y < 1 \quad \text{ή} \quad y > 3 \\ &\quad e^x < 1 \quad \text{ή} \quad e^x > 3 \\ &\quad x < 0 \quad \text{ή} \quad x > \ln 3 \end{aligned}$$

Οπότε, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$

Για να ορίζεται η g , πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε, το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g = (0, +\infty)$

ii)

$$\begin{aligned} \text{Κοινό πεδίο ορισμού των } f, g: A &= A_f \cap A_g \\ &= [(-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)] \cap (0, +\infty) \\ &= (\ln 3, +\infty) \quad \mathbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln 3 + \ln(e^x - 1) \\ \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) &= \ln[3(e^x - 1)] \\ e^{2x} - 4e^x + 3 &= 3(e^x - 1) \\ e^{2x} - 4e^x + 3 &= 3e^x - 3 \\ e^{2x} - 7e^x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Θέτουμε } e^x = y, \quad y^2 - 7y + 6 = 0 &\Leftrightarrow y = 1 \quad \text{ή} \quad y = 6 \\ e^x = 1 &\quad \text{ή} \quad e^x = 6 \\ x = 0 &\quad \text{ή} \quad x = \ln 6 \end{aligned}$$

Λόγω της (1), δεκτή τιμή είναι μόνο η $x = \ln 6$.

$$\begin{aligned} \text{Για } x = \ln 6, \text{ έχουμε } g(\ln 6) &= \ln 3 + \ln(e^{\ln 6} - 1) \\ &= \ln 3 + \ln(6 - 1) \\ &= \ln 3 + \ln 5 = \ln 15 \end{aligned}$$

Άρα οι C_f , C_g έχουν κοινό σημείο το $(\ln 6, \ln 15)$

9.i) Να δείξετε ότι $1 + 2\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3 84$ ii) Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $\log_3 \frac{1}{x+1}$, $\log_3 \sqrt{2x}$, $1 + 2\log_3 2 + \log_3 7$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.**Προτεινόμενη λύση**

i)

$$\begin{aligned}
 1 + 2\log_3 2 + \log_3 7 &= \log_3 3 + \log_3 2^2 + \log_3 7 \\
 &= \log_3 (3 \cdot 4 \cdot 7) \\
 &= \log_3 84
 \end{aligned}$$

ii)

Περιορισμός : $x > 0$

Θα πρέπει να ισχύει :

$$2\log_3 \sqrt{2x} = \log_3 \frac{1}{x+1} + 1 + 2\log_3 2 + \log_3 7$$

$$2\log_3 \sqrt{2x} = \log_3 \frac{1}{x+1} + \log_3 84$$

$$\log_3 2x = \log_3 \frac{84}{x+1}$$

$$2x = \frac{84}{x+1}$$

$$x^2 + x - 42 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \quad \text{ή} \quad x = -7$$

Δεκτή τιμή η $x = 6$

10.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \alpha \ln x + \beta$, $x > 0$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- i) Αν $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ και $f(e) = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = -2$
- ii) Για $\alpha = -1$ και $\beta = -2$, να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα των x

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{e}\right) = 0 &\Leftrightarrow \left(\ln \frac{1}{e}\right)^3 + 2\left(\ln \frac{1}{e}\right)^2 + \alpha \ln \frac{1}{e} + \beta = 0 \\ &(\ln 1 - \ln e)^3 + 2(\ln 1 - \ln e)^2 + \alpha(\ln 1 - \ln e) + \beta = 0 \\ &-1 + 2 - \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha - \beta = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e) = 0 &\Leftrightarrow (\ln e)^3 + 2(\ln e)^2 + \alpha \ln e + \beta = 0 \\ &1 + 2 + \alpha + \beta = 0 \\ &\alpha + \beta = -3 \quad (2) \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\alpha = -1$ και $\beta = -2$

ii)

Για $\alpha = -1$ και $\beta = -2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = (\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \\ &(\ln x)^2 [\ln x + 2] - (\ln x + 2) = 0 \\ &(\ln x + 2) [(\ln x)^2 - 1] = 0 \\ &\ln x = -2 \quad \text{ή} \quad \ln x = -1 \quad \text{ή} \quad \ln x = 1 \\ &x = e^{-2} \quad \text{ή} \quad x = e^{-1} \quad \text{ή} \quad x = e \end{aligned}$$

Οπότε, τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι $(e^{-2}, 0)$, $(e^{-1}, 0)$, $(e, 0)$

11.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(3x-14)}{\ln(x-4)}$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 2$
- iii) Να βρείτε το $\omega \in (0, \pi)$, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(5\eta\mu\omega, 0)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει να ισχύουν : $3x-14 > 0$ και $x-4 > 0$ και $\ln(x-4) \neq 0$

$$x > \frac{14}{3} \quad \text{και} \quad x > 4 \quad \text{και} \quad x-4 \neq 1$$

$$x > \frac{14}{3} \quad \text{και} \quad x \neq 5$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \left(\frac{14}{3}, 5\right) \cup (5, +\infty)$

ii)

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-14)}{\ln(x-4)} = 2$$

$$\ln(3x-14) = 2\ln(x-4)$$

$$\ln(3x-14) = \ln(x-4)^2$$

$$3x-14 = x^2-8x+16$$

$$x^2-11x+30=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ απορρίπτεται, ή } x=6$$

Άρα το ζητούμενο κοινό σημείο είναι το $(6, 2)$

iii)

$$\text{Θα πρέπει να ισχύει } f(5\eta\mu\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(15\eta\mu\omega-14)}{\ln(\eta\mu\omega-4)} = 0$$

$$\ln(15\eta\mu\omega-14) = 0$$

$$15\eta\mu\omega-14 = 1$$

$$\eta\mu\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$$

12.

Να συγκριθούν οι αριθμοί $\log_{1,5}(x+1)$ και $\log_{1,5}(x+1)^2$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$$\log_{1,5}(x+1) > \log_{1,5}(x+1)^2 \Leftrightarrow x+1 > (x+1)^2$$

$$x+1 > x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

Σχόλιο 2

- Επομένως
- αν $-1 < x < 0$ τότε $\log_{1,5}(x+1) > \log_{1,5}(x+1)^2$
 - αν $x > 0$ τότε $\log_{1,5}(x+1) < \log_{1,5}(x+1)^2$.
 - αν $x = 0$ τότε $\log_{1,5}(x+1) = \log_{1,5}(x+1)^2$.

13.

Να συγκριθούν οι αριθμοί $\log_{0,3}(x+2)$ και $\log_{0,3}(2x+3)$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x+2 > 0$ και $2x+3 > 0 \Leftrightarrow$

$$x > -2 \text{ και } x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

Σχόλιο 2

$$\log_{0,3}(x+2) > \log_{0,3}(2x+3) \Leftrightarrow x+2 < 2x+3 \Leftrightarrow x > -1$$

- Επομένως
- αν $x > -1$ τότε $\log_{0,3}(x+2) > \log_{0,3}(2x+3)$
 - αν $-\frac{3}{2} < x < -1$ τότε $\log_{0,3}(x+2) < \log_{0,3}(2x+3)$
 - αν $x = -1$ τότε $\log_{0,3}(x+2) = \log_{0,3}(2x+3)$

14.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ 2x + 7y = 57 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να είναι $x > 0$ και $y > 0$.

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται $\log_5(xy) = 2 \Leftrightarrow$

$$xy = 5^2$$

$$xy = 25$$

Το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} xy = 25 \\ 2x + 7y = 57 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 25 \text{ και } y = 1) \text{ ή } \left(x = \frac{7}{2} \text{ και } y = \frac{50}{7} \right)$$

15.

Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες ευρώ), t έτη μετά την κυκλοφορία του στην αγορά.

Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300 ευρώ, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής.

Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$, $t \geq 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε :

i) Να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$

ii) Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής τιμής.

iii) Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής τιμής.

Προτεινόμενη λύση

i)

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\ln Q(t) = \alpha t + \beta \Leftrightarrow Q(t) = e^{\alpha t + \beta}$ **(1)**

Επίσης $Q(0) = 3$ και $Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{\beta} = 3$ και $e^{\frac{1}{2}\alpha + \beta} = \frac{3}{2}$

$$e^{\beta} = 3 \quad \text{και} \quad e^{\frac{1}{2}\alpha} \cdot e^{\beta} = \frac{3}{2}$$

$$e^{\beta} = 3 \quad \text{και} \quad e^{\frac{1}{2}\alpha} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$e^{\beta} = 3 \quad \text{και} \quad e^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$e^{\beta} = 3 \quad \text{και} \quad e^{\alpha} = \frac{1}{4} = 4^{-1}$$

Οπότε η (1) γίνεται $Q(t) = e^{\alpha t + \beta} = e^{\alpha t} \cdot e^{\beta} = 3 \cdot 4^{-t}$.

ii)

$$\text{Πρέπει} \quad Q(t) = \frac{1}{16} Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} = 3 \cdot \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^{-t} = 4^{-2} \Leftrightarrow t = 2$$

Επομένως σε 2 έτη θα είναι η τιμή του προϊόντος ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής τιμής

iii)

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει} \quad Q(t) &\leq \frac{1}{9} Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{9} \cdot 3 \\ &4^{-t} \leq 3^{-2} \\ &\ln 4^{-t} \leq \ln 3^{-2} \end{aligned}$$

Προσοχή στις
Μονάδες μέτρησης

$$-t \ln 4 \leq -2 \ln 3$$

$$t \geq \frac{2 \ln 3}{\ln 4}$$

$$t \geq \frac{2 \ln 3}{\ln 2^2} = \frac{2 \ln 3}{2 \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

netsuccess.gr